DS n°3 : Applications, fonctions usuelles, intégration

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées

Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ± 1 point.

Exercice 1 : Calcul d'intégrales

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t \arctan t \, dt$

2) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{t(\ln t)^2 - 4t} \, dt$

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{3 + \cos^2 x} \, dx$

4) Soit $b \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x - ib}$. Quelle est sa limite quand a tend vers $+\infty$?

Exercice 2 : Une application complexe

On définit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{1\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{\overline{z} + 1}{z - 1} \end{aligned}$$

1) Quels sont les antécédents de 1 par f ?

2) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.

3) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

4) Dans cette question, on note $E := \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et g la restriction de f à E.

- **a)** Montrer que $g(E) \subset E$.
- **b)** Soit $x \in E$. Simplifier $(g \circ g)(x)$.
- **c)** En déduire que g est une bijection de E sur E et déterminer sa réciproque.

Exercice 3 : Relation d'équivalence entre fonctions

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{A}$ la relation $\mathcal{R}$ de la manière suivante : pour toutes $f, g \in \mathcal{A}$,

$$f \mathcal{R} g \iff \exists \varphi \in \mathcal{B} \quad f = g \circ \varphi$$

Autrement dit, $f\mathcal{R}g$ si et seulement s'il existe une bijection φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f = g \circ \varphi$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Soit $f, g \in \mathcal{A}$ telles que $f\mathcal{R}g$. Montrer que si g est injective, alors f est injective. Montrer que si g est surjective, alors f est surjective.

3) On note $f_0 : x \mapsto 0$ et pour tout $f \in \mathcal{A}$, on note $\overline{f}$ la classe d'équivalence de f pour $\mathcal{R}$. Que vaut $\overline{f_0}$? Que vaut $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$?

4) Soit $f \in \mathcal{B}$. Quelle est la classe d'équivalence de f ?

Problème : formules de Leibniz et de Machin

Partie A

1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Rappeler la formule donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$, lorsque ces quantités sont bien définies.

2) À l'aide de cette formule, montrer **soigneusement** que pour tous réels x, y tels que $xy \neq 1$ et $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$,

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

3) En déduire les formules suivantes :

a) $2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$

b) $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$

c) $\arctan\left(\frac{120}{119}\right) - \arctan 1 = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

4) En déduire la *formule de Machin* : $\quad \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$

Partie B

Soit $n \in \mathbb{N}$.

5) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle \frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$.

6) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle \arctan x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = F_n(x)$, où F_n est une primitive d'une fonction à préciser.

On admet que si f, g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f \leq g$ alors : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \displaystyle\int_0^x f \leq \int_0^x g$.

7) Montrer que $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad -t^{2n+2} \leq F_n'(t) \leq t^{2n+2}$.
En déduire que $\quad \forall x \in [0,1] \quad F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

8) En déduire la *formule de Madhava-Leibniz* :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$